Analiza funkcjonalna
Lista 1

Zad 1. Pokazać, że przestrzenie ciągów: sumowalnych w p-tej potędze l_p, ograniczonych l_∞, zbieżnych c oraz zbieżnych do zera c_0, są (wraz ze standardowymi normami) przestrzeniami Banacha.

Zad 2. Wykazać inkluzje

$$l_1 \subset ... \subset l_p \subset ... \subset l_q \subset ... \subset c_0 \subset c \subset l_\infty, \qquad 1 < p < q < \infty$$

i pokazać, że żadnej z nich nie można zastąpić równością.

Zad 3. Sprawdzić, czy ciąg x_n elementów przestrzeni X jest zbieżny do ciągu a.

N	X	x_n	a
1.	l_1	$(\underbrace{\sin\frac{1}{2^n}, \sin\frac{1}{2^n}, ..., \sin\frac{1}{2^n}}_{n}, 0, ...)$	$(0, 0, ..., 0, ...)$
2.	l_3	$(\underbrace{\frac{n^2}{2^n}, \frac{n^2}{2^n}, ..., \frac{n^2}{2^n}}_{n}, 0, ...)$	$(1, 0, ..., 0, ...)$
3.	c	$(\underbrace{(\frac{4n+1}{4n+3})^n, (\frac{4n+1}{4n+3})^n, ..., (\frac{4n+1}{4n+3})^n}_{n}, 0, ...)$	$(e^{-\frac{1}{2}}, e^{-\frac{1}{2}}, ..., e^{-\frac{1}{2}}, ...)$
4.	$l_{\frac{8}{5}}$	$(\underbrace{\frac{\cos\frac{1}{n}}{n}, \frac{\cos\frac{1}{n}}{n}, ..., \frac{\cos\frac{1}{n}}{n}}_{n}, 0, ...)$	$(0, 0, ..., 0, ...)$
5.	l_∞	$(0, \frac{7}{8}, ..., \frac{n^3-1}{n^3}, 0, 0, ...)$	$(0, \frac{7}{8}, ..., \frac{k^3-1}{k^3}, \frac{(k+1)^3-1}{(k+1)^3}, ...)$
6.	l_2	$(\underbrace{\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2}, ..., \frac{1}{n^2}}_{n}, n, 0, ...)$	$(0, 0, ..., 0, ...)$

Zad 4. Zbadać zbieżność ciągu x_n w przestrzeni X.

N	X	x_n	N	X	x_n
1.	l_∞	$(\underbrace{tg(1+\frac{1}{n})^n, tg(1+\frac{1}{n})^n, ..., tg(1+\frac{1}{n})^n}_{n}, 0, 0, ...)$	6.	$l_{\frac{5}{2}}$	$((\frac{n+1}{n})^n, (\frac{n+2}{n})^n, ..., (\frac{n+(n-1)}{n})^n, 0, 0, ...)$
2.	l_3	$(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, ..., \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n}, 1, 0, ...)$	7.	c	$(\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, ..., \frac{n^2}{n^2+1}, 0, 0, ...)$
3.	l_2	$(\underbrace{\sin\frac{1}{n}, \sin\frac{1}{n}, ..., \sin\frac{1}{n}}_{n^2}, 0, 0, ...)$	8.	l_1	$(\underbrace{\frac{\sin 3^n}{n^2}, \frac{\sin 3^n}{n^2}, ..., \frac{\sin 3^n}{n^2}}_{n}, 0, 0, ...)$
4.	c_0	$(tg(\frac{1}{n}), tg(\frac{1}{n^2}), ..., tg(\frac{1}{n^k}), tg(\frac{1}{n^{k+1}}), ...)$	9.	l_∞	$(1, \sqrt[2]{2}, \sqrt[3]{3}..., \sqrt[n]{n}, 0, 0, ...)$
5.	l_2	$(\underbrace{0, .., 0}_{n}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}, ..., \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n}, 0, 0, ...)$	10.	$l_{\sqrt{5}}$	$(\underbrace{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}, \sin\frac{1}{\sqrt{n}}, ..., \sin\frac{1}{\sqrt{n}}}_{n}, 0, ...)$

Zad 5. Sprawdzić otwartość, domkniętość i ograniczoność podzbioru M przestrzeni l_p.

N	p	M	N	p	M
1.	1	$\{x : \lvert x(k)\rvert \leq \frac{1}{k}\}$	3.	∞	$\{x : \exists_n \, \forall_{k>n} x(k) = 0\}$
2.	2	$\{x : x(k) > 0\}$	4.	1	$\{x : \sum_{k=1}^{\infty} \lvert x(k)\rvert^2 < 1\}$